

Capítulo 6

BASES

- Suponha-se que $W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e que $\{v_1, \dots, v_k\}$ é um conjunto de vectores linearmente dependentes.

Suponha-se que v_p que é combinação linear dos restantes v_j , $j=1, \dots, p-1, p+1, \dots, k$.



$$W = \langle v_1, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_k \rangle$$

Observação:

Repetindo este processo, um número finito de vezes, pode retirar-se, um a um, todos os geradores de W que são combinação linear de outros geradores de W . No final teremos apenas os geradores que “realmente interessam”.

Um conjunto de geradores linearmente independentes

Definição:

Base de W

Um conjunto de vectores $v_1, \dots, v_k$ de um subespaço W é uma **base** de W se

1. $v_1, \dots, v_k$ são linearmente independentes;

2. $v_1, \dots, v_k$ gera W , ou seja, se $W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$

Exemplos:

① $\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ em que $e_1, e_2, \dots, e_n$ são os vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

Como o conjunto formado por estes vectores é l.independente

então $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

é uma base de $\mathbb{R}^n$, chamada **base canónica de $\mathbb{R}^n$** .

2 Sendo $W = \langle (1, 2, 2), (0, 1, 1), (2, 4, 4) \rangle$, porque

$$(2, 4, 4) = 2(1, 2, 2)$$

então

$\{ (1, 2, 2), (0, 1, 1), (2, 4, 4) \}$ não é uma base de W .

Mas,

$$W = \langle (1, 2, 2), (0, 1, 1) \rangle,$$

e como $(1, 2, 2), (0, 1, 1)$ são linearmente independentes então

$$\{(1, 2, 2), (0, 1, 1)\}$$

é uma base de W .

3 O conjunto

$$\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$$

não é uma base de $\mathbb{R}^3$. Não é linearmente independente.

4 O conjunto

$$\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$$

não é uma base de $\mathbb{R}^3$ porque não gera $\mathbb{R}^3$.

5 O conjunto

$$\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Convenção:

No caso de $W = \langle 0_{\mathbb{R}^n} \rangle$, convencionou-se que a sua base é o conjunto vazio, $\emptyset$.

Pode ter-se duas bases de um mesmo espaço com um número diferente de elementos?

Proposição:

Todas as bases de um subespaço de $\mathbb{R}^n$ têm o mesmo número de vectores.

Definição:

Se W é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, chamamos **dimensão** de W e denotamos por

$$\dim W,$$

ao número de vectores de qualquer sua base.

Exemplos:

1. Se $W = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ então $\dim W = 0$.
2. Uma recta de $\mathbb{R}^n$ que passa pela origem tem dimensão 1.
3. Um plano de $\mathbb{R}^n$ que passa pela origem tem dimensão 2.
4. $\mathbb{R}^n$ tem dimensão n .
5. O subespaço $W = \langle (1, 2, 2), (0, 1, 1), (2, 4, 4) \rangle$, tem como base o conjunto

$$\{(1, 2, 2), (0, 1, 1)\},$$

pelo que

$$\dim W = 2.$$

Alguns Resultados Sobre Bases

Teorema:

Se W um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k então qualquer conjunto $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ com k elementos linearmente independentes de W constitui um base de W .

Exemplos: $\dim \mathbb{R}^3=3$. Como o conjunto

$$\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

é constituído por 3 elementos de $\mathbb{R}^3$ l. Independentes então é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Teorema:

Sejam W um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k e S um conjunto de $r \leq k$ elementos linearmente independentes de W .

Então, existe uma base de W que contém os vectores de S .

Dem: Se $S = \{v_1, \dots, v_r\}$

é um subconjunto de W constituído por elementos linearmente independentes então, se S não é uma base é porque S não gera W tendo-se $r < k$. Assim,

existe $s_1 \in W$ que não se escreve como combinação linear dos vectores de S . Mas então, o conjunto

$$T_1 = \{v_1, \dots, v_r, s_1\}$$

é linearmente independente. Se T_1 não é uma base de W , repetimos o processo anterior.

Este processo tem fim uma vez que ao obtermos k vectores linearmente independentes de W teremos uma base de W . ■

Corolário:

Qualquer subespaço de $\mathbb{R}^n$ tem uma base e a sua dimensão é menor ou igual a n .

Exercício1: Considere o conjunto de vectores l.independentes

$$S = \{(1, 1, 1), (-2, -2, 3)\}.$$

Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha S .

Proposição:

Se $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ é uma base do subespaço W de $\mathbb{R}^n$, então qualquer vector u de W se escreve de forma única como combinação linear dos vectores de S .

Dem:

Como $W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, se $u \in W$, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tais que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k.$$

Suponhamos que u se escreve de outra forma

$$u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k.$$

Então,

$$0 = u - u = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k.$$

Porque S é linearmente independente,

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_k - \beta_k = 0$$

ou seja,

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_k = \beta_k.$$

E a forma de escrever u como combinação linear de $v_1, \dots, v_k$ é única ■

Teorema das Dimensões

Teorema:

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então,

$$\dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f = n.$$

Dem:

1º Caso) Se $f = 0$, então $\text{Nuc } f = \mathbb{R}^n$ e $\text{Im } f = \{0_{\mathbb{R}^m}\}$.
Logo o Teorema verifica-se.

2º Caso) Suponhamos que $f \neq 0$. (Logo $\text{Nuc } f \neq \mathbb{R}^n$)
Seja $B = \{v_1, \dots, v_i\}$ uma base de $\text{Nuc } f$ e

$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_j, \dots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. ($\mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B} \neq \emptyset$)

Tem-se que

$$f(\mathbb{R}^n) = \text{Im } f = \langle f(v_1), \dots, f(v_j), \dots, f(v_n) \rangle,$$

e como $f(v_1) = \dots = f(v_j) = 0$, então

$$\text{Im } f = \langle f(v_{j+1}), \dots, f(v_n) \rangle.$$

Por fim mostre-se que os elementos $f(v_{j+1}), \dots, f(v_n)$ são linearmente independentes.

Para tal suponha-se que não o são, ou seja, suponha-se que existem escalares $a_{j+1}, \dots, a_n$, não todos nulos tais que

$$a_{j+1}f(v_{j+1}) + \dots + a_nf(v_n) = 0_{\mathbb{R}^m},$$

e mostremos que se chega a uma contradição.

Ora, como f é aplicação linear, vem

$$f(a_{j+1}v_{j+1} + \dots + a_nv_n) = 0_{\mathbb{R}^m}$$

Mas então,

$$a_{j+1}v_{j+1} + \dots + a_nv_n \in \text{Nuc } f = \langle v_1, \dots, v_j \rangle.$$

Assim, existiriam escalares $b_1, \dots, b_j$ tais que

$$a_{j+1}v_{j+1} + \dots + a_nv_n = b_1v_1 + \dots + b_jv_j.$$

Donde,

$$b_1v_1 + \dots + b_jv_j + (-a_{j+1})v_{j+1} + \dots + (-a_n)v_n = 0_{\mathbb{R}^n},$$

para algum dos $a_{j+1}, \dots, a_n$ não nulos. Mas isto é impossível pois $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_j, \dots, v_n\}$ é base de $\mathbb{R}^n$.

Conclusão: $\text{Im } f = \langle f(v_{j+1}), \dots, f(v_n) \rangle$, com $f(v_{j+1}), \dots, f(v_n)$ vectores linearmente independentes. Logo, $\{f(v_{j+1}), \dots, f(v_n)\}$ é base de $\text{Im } f$.

Assim, $\dim \text{Nuc } f = j$, $\dim \text{Im } f = n - j$ pelo que

$$\dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f = n. \blacksquare$$

Definição:

Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ uma base ordenada (isto é, a ordem dos vectores em $\mathcal{B}$ é fixa) do subespaço W de $\mathbb{R}^n$. Se

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k,$$

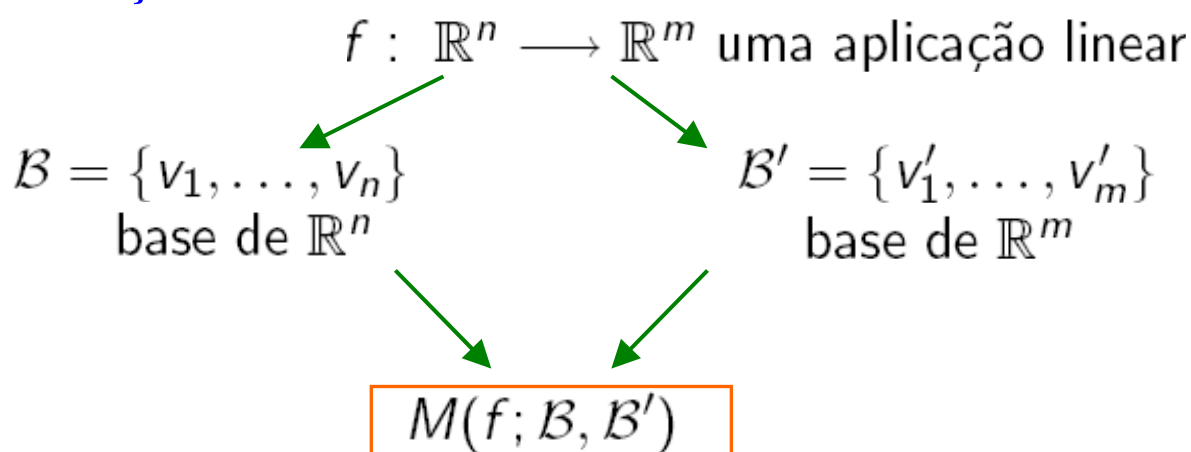
dizemos que as coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ são

$$a_1, a_2, \dots, a_k \quad \text{ou que,} \quad (a_1, a_2, \dots, a_k)$$

é o k -uplo de coordenadas de u na base $\mathcal{B}$.

Matriz de uma Aplicação Linear

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\text{red arrow}} & M_f \\ \text{aplicação linear} & & \text{matriz canónica} \end{array}$$

Definição:

Matriz de f em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ ($m \times n$)

Matriz cuja i -ésima coluna é o m -uplo das coordenadas de $f(v_i)$ na base $\mathcal{B}'$, $i = 1, \dots, n$.

Exemplo: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (x + 2y, 3y, -x + y)$

$\mathcal{B} = \{(2, 1), (0, 3)\} \longrightarrow \text{Base de } \mathbb{R}^2$

$\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \longrightarrow \text{Base de } \mathbb{R}^3$

? $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

$$f(2, 1) = (4, 3, -1) = 4(1, 1, 1) - 1(0, 1, 0) - 5(0, 0, 1)$$

$$f(0, 3) = (6, 9, 3) = 6(1, 1, 1) + 3(0, 1, 0) - 3(0, 0, 1)$$

Assim,

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 3 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

- Reparemos que a matriz canónica de f (matriz de f em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica de $\mathbb{R}^3$) é

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(1, 0) = (1, 0, -1) \quad \text{e} \quad f(0, 1) = (2, 3, 1).$$

Observação: A matriz canónica de um aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é a matriz de f relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, isto é



$$M_f = M(f; \text{b.c. de } \mathbb{R}^n, \text{b.c de } \mathbb{R}^m)$$

Matriz Mudança de Base

Considere-se a aplicação linear

$$id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x, y)$$

Sejam $\mathcal{B} = \{(2, 1), (0, 3)\}$, $\mathcal{B}_1$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$

1 **Matriz mudança de Base $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$**

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

pois

$$id_{\mathbb{R}^2}(2, 1) = (2, 1) = 2(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$id_{\mathbb{R}^2}(0, 3) = (0, 3) = 0(1, 0) + 3(0, 1).$$

2 **Matriz mudança de Base $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B})$**

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

pois

$$id_{\mathbb{R}^2}(1, 0) = (1, 0) = \frac{1}{2}(2, 1) - \frac{1}{6}(0, 3)$$

$$id_{\mathbb{R}^2}(0, 1) = (0, 1) = 0(2, 1) + \frac{1}{3}(0, 3).$$

3 **Matriz mudança de Base $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$**

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pois

$$id_{\mathbb{R}^2}(2, 1) = (2, 1) = 1(2, 1) + 0(0, 3)$$

$$id_{\mathbb{R}^2}(0, 3) = (0, 3) = 0(2, 1) + 1(0, 3).$$

Observação: $M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_n$.

Definição: Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_1$ duas bases de $\mathbb{R}^n$.

Chamamos **matriz de mudança de base** $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ à matriz

$$M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1).$$

Qual a importância da matriz de uma aplicação linear e da matriz mudança de base?

- Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (-x + 2y, 2y, 3y)$

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\} \longrightarrow \text{Base de } \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\} \longrightarrow \text{Base de } \mathbb{R}^3$$

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = ?$$

$$f(1, 1) = (1, 2, 3) = 1(1, 1, 1) + 1(0, 1, 1) + 1(0, 0, 1)$$

$$f(0, 1) = (2, 2, 3) = 2(1, 1, 1) + 1(0, 1, 1) + 0(0, 0, 1)$$

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(3, 2) = ?$$

- Usando a definição de f , $f(3, 2) = (1, 4, 6)$.

- Usando a matriz $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, $(3, 2) = 3(1, 1) - 1(0, 1)$

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$1(1, 1, 1) + 2(0, 1, 1) + 3(0, 0, 1) = f(3, 2)$$

Proposição: Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_m\}$ uma base de $\mathbb{R}^m$. Se $(b_1, \dots, b_n)$ são as coordenadas de um vector u de $\mathbb{R}^n$ na base $\mathcal{B}$ então as coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}'$ são dadas por $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Corolário: Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_1$ duas bases de $\mathbb{R}^n$.

Se $(b_1, \dots, b_n)$ são as coordenadas de um vector u de $\mathbb{R}^n$ na base $\mathcal{B}$ então as coordenadas de u na base $\mathcal{B}_1$ é $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tal que

$$M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Qual a relação entre $M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ e $M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B})$?

Proposição: $M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) = M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)^{-1}$.

Dem: Usando as hipóteses do Corolário , temos que

$$M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou seja, $M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B})M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) = I_n$. ■

Qual a relação entre as matrizes de um aplicação linear relativamente a pares de bases diferentes?

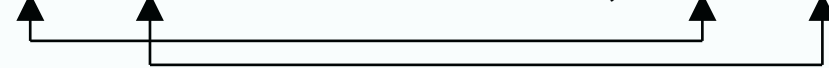
$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

$$M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) \quad ?$$

Teorema:

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear.

$\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_1$ duas bases de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}'_1$ duas bases de $\mathbb{R}^m$.



Então,

$$M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = M(id_{\mathbb{R}^m}; \mathcal{B}', \mathcal{B}'_1)M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}).$$

Dem:

Sejam $u \in \mathbb{R}^n$ e $f(u) \in \mathbb{R}^m$. Considere-se

$u \begin{cases} \rightarrow (b_1, \dots, b_n) & \text{coordenadas de } u \text{ na base } \mathcal{B} \\ \rightarrow (c_1, \dots, c_n) & \text{coordenadas de } u \text{ na base } \mathcal{B}_1 \end{cases}$

$f(u) \begin{cases} \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_m) & \text{coordenadas de } f(u) \text{ na base } \mathcal{B}' \\ \rightarrow (\beta_1, \dots, \beta_m) & \text{coordenadas de } f(u) \text{ na base } \mathcal{B}'_1 \end{cases}$

Assim, da definição das matrizes de uma aplicação linear tem-se,

$$M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$M(id_{\mathbb{R}^m}; \mathcal{B}', \mathcal{B}'_1) M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \quad ?$$

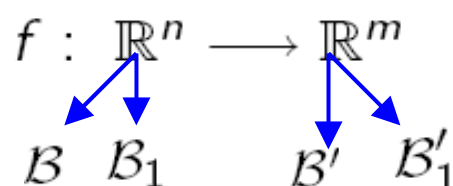
$$M(id_{\mathbb{R}^m}; \mathcal{B}', \mathcal{B}'_1) M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} =$$

$$M(id_{\mathbb{R}^m}; \mathcal{B}', \mathcal{B}'_1) M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

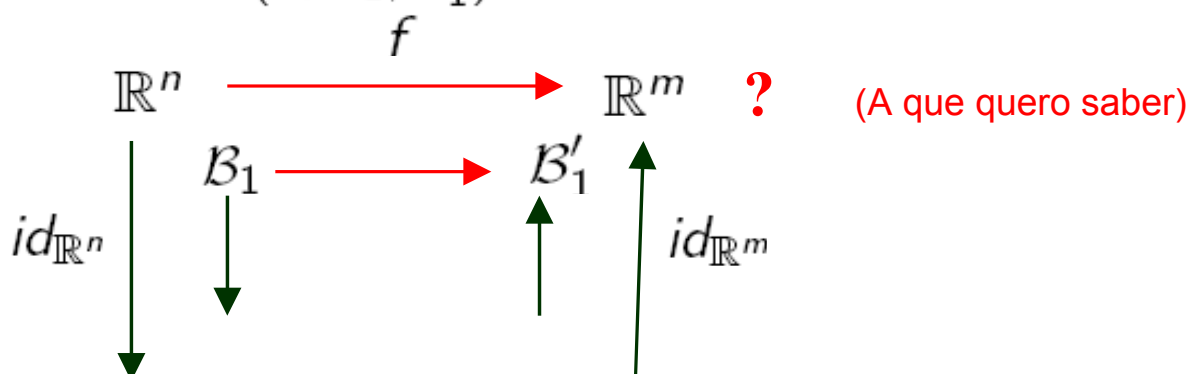
$$M(id_{\mathbb{R}^m}; \mathcal{B}', \mathcal{B}'_1) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Assim se conclui a igualdade da matrizes. ■

Diagrama: (Para não esquecer o resultado anterior)



Suponha-se que conhecemos $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ e queremos obter, à sua custa, a matriz $M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)$.



$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\quad} & B' \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R}^m \end{array} \quad (\text{A que sei})$$

$$\underline{M(f; B_1, B'_1) = M(id_{\mathbb{R}^m}; B', B'_1) M(f; B, B') M(id_{\mathbb{R}^n}; B_1, B)}.$$

Exemplo: Determinemos a matriz da aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

em relação às bases $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$

$$B'_1 = \{(0, 1), (1, 1)\} \text{ de } \mathbb{R}^2$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

sabendo que

Ora, $M_f = M(f; b.c., b.c.)$. Recorrendo ao digrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R}^2 \quad ? \quad (\text{A que quero saber}) \\ \downarrow id_{\mathbb{R}^3} & \begin{array}{c} B_1 \xrightarrow{\quad} B'_1 \\ \downarrow b.c. \end{array} & \uparrow id_{\mathbb{R}^2} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (\text{A que sei})$$

Então,

$$M(f; B_1, B'_1) = \underbrace{M(id_{\mathbb{R}^2}; b.c., B'_1)}_{?} M_f \underbrace{M(id_{\mathbb{R}^3}; B_1, b.c.)}_{?}.$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1, 0) = -1(0, 1) + 1(1, 1)$$

Fácil por ser escrever os

$$(0, 1) = 1(0, 1) + 0(1, 1)$$

vectores de $\mathcal{B}_1$ na b.c.

Logo,

$$M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo:

Determinemos a matriz da aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

em relação às bases

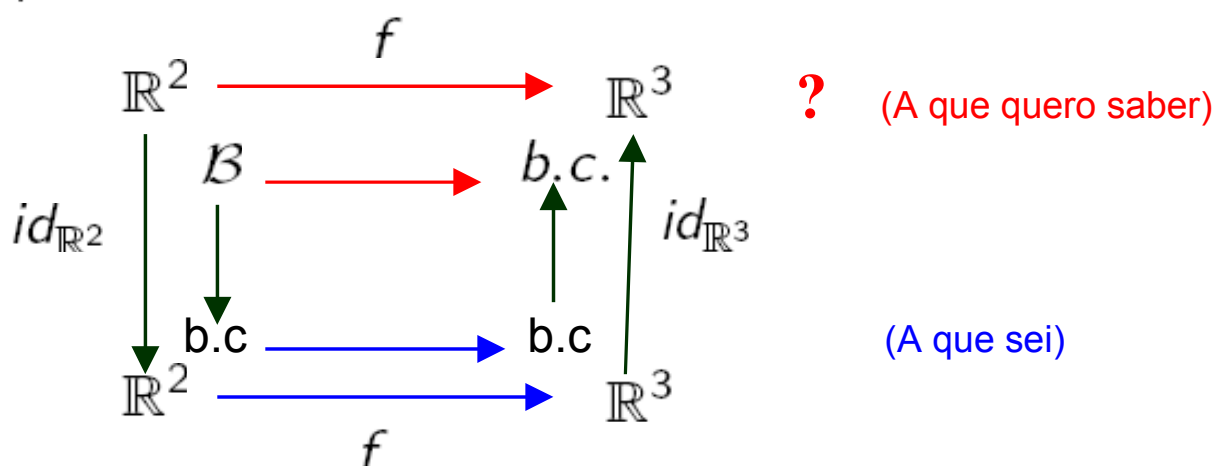
$$\mathcal{B} = \{(0, 1), (1, 1)\} \text{ de } \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{B}' = \text{b.c. de } \mathbb{R}^3$$

sabendo que

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ora, $M_f = M(f; \text{b.c.}, \text{b.c.})$. Recorrendo ao digrama



Então,

$$M(f; \mathcal{B}, \text{b.c.}) = \underbrace{M(\text{id}_{\mathbb{R}^3}; \text{b.c.}, \text{b.c.})}_{\substack{? \\ || \\ I_3}} M_f \underbrace{M(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \text{b.c.})}_{\substack{? \\ || \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}}.$$

Logo,

$$M(f; \mathcal{B}, b.c.) = I_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$